

第三章 (离散时间) Markov 链

- ① 最简单的马氏链: 随机游动
 - 前言
 - 格点轨道与反射原理
 - 对称简单随机游动
- ② 马氏链的基本定义
 - 引例
 - 定义及例
- ③ Chapman-Kolmogorov 方程与状态的分类
 - Chapman-Kolmogorov 方程
 - 有限维分布与相关概率计算
 - 状态之间的关系
 - 状态的分类
- ④ 转移概率的极限性质与平稳分布
 - 基本极限定理
 - 平稳分布



前言

对于一个在状态空间 E 上的随机过程 $X = \{X_t, t \in T\}$,

粗略地, 对任意 $s < t < u$, 已知现在的状态 X_t ,

将来状态 X_u 取值的概率与过去状态 X_s 的取值无关, 则称该性质为马氏性(无后效性), 相应过程称为马氏过程.

- 马氏链是一类特殊的马氏过程,

其状态空间 E 是一个至多可列点集.

- 这是最简单最经典也最早被研究的随机过程, 以这样一个直观模型作为开始, 目的是让大家对随机过程的问题和研究方法有一个基本的认识.



第 3.1 节 随机游动

随机游动被广泛运用于

研究股价收益率、收益过程和期权等问题.

(在此, 独立性和重复性是构造金融模型的关键.)

例如, 设投资者在一公平股市可得到所投资股票的所有情报, 则

可建立相应的收益过程模型(如最简单的, 对称随机游动).

从而在一定范围内做出股价走势的预测和推断.



$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$: 概率空间,

随机游动是指独立同分布随机变量序列组成的部分和序列.

定义:

$\{X_n : n \geq 1\}$: (Ω, \mathcal{F}) 上独立同分布随机变量序列,

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = p, \mathbb{P}(X_n = -1) = 1 - p = q.$$

定义

$$S_0 = 0, S_n := \sum_{k=1}^n X_k, \quad n \geq 1,$$

则称 $\{S_n, n \geq 0\}$ 为从 0 出发的简单随机游动.

特别的, 若 $p = q = \frac{1}{2}$, 则为对称简单随机游动.



例 2.2.3 甲乙两人游戏, 每局甲赢 1 元和输 1 元的概率都是 $\frac{1}{2}$. 假设一开始甲手里是 0 元, 记 S_n 为 n 局之后甲拥有的钱数.

问: 输的人是否一定会赢回来? 赢的人是否一定会输回去?

注. 这实际上是样本函数的性质:

随机序列 $\{S_n, n \geq 1\}$ 的样本轨道是否在有限时间内回到 0?
引入首次返回零点的时间

$$T = \inf\{n > 0 : S_n = 0\} : 0 \text{ 点的首中时},$$

可以证明

$$\mathbb{P}(T < \infty) = 1.$$

#



格点轨道

为了研究随机游动样本函数的性质, 需要考虑

格点空间: 在坐标平面上的整数格点组成的空间.

定义 3.1.1

设 $m < n$, a, b 是整数, 一条 (m, a) 到 (n, b) 的格点轨道是指, 整数列 $(s_m, s_{m+1}, \dots, s_n)$ 满足:

- (i) $s_m = a, s_n = b$;
- (ii) 对 $m < k \leq n$, $s_k - s_{k-1}$ 取值为 1 或 -1 .

用直线将相邻点 $(k-1, s_{k-1})$ 与 (k, s_k) 连接, 形成一条折线. $n - m$ 称为是轨道的长度.



注释

① 经过平移,

从 (m, a) 到 (n, b) 的格点轨道总数
= 从 $(0, 0)$ 到 $(n - m, b - a)$ 的格点轨道总数.

用 $N_{n,x}$ 表示 $(0, 0)$ 到 (n, x) 的格点轨道总数.

② 存在连接 $(0, 0)$ 与 (n, x) 的格点轨道当且仅当

存在 $p, q \in \mathbb{Z}_+$ 使得 $n = p + q, x = p - q$.

$$N_{n,x} = \binom{p+q}{p} = \binom{n}{\frac{n+x}{2}}, \quad N_{n,-x} = N_{n,x}.$$



反射原理

定理 3.1.1

设 $a, b > 0$, $m < n$, 则

从 (m, a) 到 (n, b) 的且与 x -轴相遇的格点轨道总数与
从 (m, a) 到 $(n, -b)$ 的格点轨道总数相同.

● 先引入如下两个集合:

A 表示从 (m, a) 到 (n, b) 的且与 x -轴相遇的格点轨道全体;

B 表示从 (m, a) 到 $(n, -b)$ 的格点轨道全体.



证. 任取 $(s_m, \dots, s_n) \in A$, 设

最迟遇到 x -轴是在 k 时刻, 则 $k = m+1, m+2, \dots, n-1$.

将轨道 k 到 n 部分按 x -轴反射得格点轨道

$$(s_m, \dots, s_k, -s_{k+1}, \dots, -s_n).$$

它是 B 中的格点轨道. 映射

$$(s_m, \dots, s_n) \mapsto (s_m, \dots, s_k, -s_{k+1}, \dots, -s_n)$$

建立了 A 到 B 上的一一对应.

□



相应概率方法

格点轨道给出一个古典概率空间 (W_n, \mathbb{P}_n) . 其中对任何 $n \geq 1$,

W_n 表示从 $(0, 0)$ 出发、长度为 n 的格点轨道全体,
 \mathbb{P}_n 是其上的古典概率.

若 $B \subset W_n$, 则有如下概率计算公式

$$\mathbb{P}_n(B) = \frac{|B|}{|W_n|} = \frac{|B|}{2^n}.$$



经典应用: 选票问题

例 3.1.1 在一次投票中,
 候选人 P, Q 的得票分别为 m, n 且 $m > n$,
 那么在整个投票过程中,
 P 的票数一直领先于(多于) Q 的票数的概率

$$P_{n,m} = \frac{m-n}{m+n}.$$

注. 记在第 n 个人投票后, P, Q 的票数差额为 s_n ($n \geq 1$), 则
 投票过程是
 $(0, 0)$ 到 $(m+n, m-n)$ 的格点轨道 $(s_0, s_1, \dots, s_{m+n})$.



证. 所求问题是计算

“(0, 0) 到 $(m+n, m-n)$ 的格点轨道除起点外不遇到 x -轴”的概率. 该事件等同于

“(1, 1) 到 $(m+n, m-n)$ 的轨道不遇到 x -轴”.

轨道总数等于 所有格点轨道总数减去

(1, 1) 到 $(m+n, m-n)$ 遇到 x -轴的轨道总数,

由反射原理, 后者即为 $N_{m+n-1, m-n+1}$.

从而所求概率

$$P_{n,m} = \frac{N_{m+n-1, m-n-1} - N_{m+n-1, m-n+1}}{N_{m+n, m-n}} = \frac{m-n}{m+n}.$$



选票问题的应用

例. 连续掷一枚硬币, 正面出现的概率是 p . 记

τ : 开始掷币之后正、反面出现的总次数首次相等的时刻,

试证

$$\mathbb{P}(\tau = 2n) = \frac{1}{2n-1} \cdot \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n, \quad n \geq 1.$$



解. 可以考虑条件“前 $2n$ 次中正面出现 n 次”, 记为 A ,

$$\mathbb{P}(\tau = 2n) = \mathbb{P}(\tau = 2n|A)\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\tau = 2n|A) \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n.$$

而在条件 A 下,

n 个正面和 n 个反面的所有可能排列是等可能的.

故此条件概率就是

“选举中两候选人各得 n 张票且其中一人在计票过程中总是领先, 直至最后一票(这一票才使票数相等)”的概率

由计票问题的结果

$$\mathbb{P}(\tau = 2n|A) = P_{n,n-1} = \frac{1}{2n-1}. \quad \#$$

对称简单随机运动

注. 由分布对称性的假设, 样本轨道有等可能性; 所以, 相应概率计算方法是古典的方法:

对称简单随机游动对应的概率空间上的问题, 等价于

格点轨道构成的概率空间上的问题, 即

可以用数格点轨道的方法计算.



一些有趣的量的分布

(1) 在 $2n$ 时刻在原点的绝对分布:

$$u_n := \mathbb{P}(S_{2n} = 0), \quad n \geq 0,$$

则

$$u_0 = 1, \quad u_n = N_{2n,0}/2^{2n} = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}, \quad n \geq 1.$$

注. 递推公式:

$$u_n = \frac{2n-1}{2n} u_{n-1}, \quad n \geq 1.$$



(2) 0 点首中时 τ 的分布:

$$\tau := \inf\{n > 0 : S_n = 0\}.$$

- 注. 1. 无法排除 τ 取无穷为值;
2. 另外若 τ 有限, 它一定是偶数.
3. 前面关于计票问题的应用已知,

$$\mathbb{P}(\tau = 2n) = \frac{1}{2n-1} u_n, \quad n \geq 1.$$



引理 3.1.1

$$1) \mathbb{P}(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots, S_{2n-1} \neq 0, S_{2n} \neq 0) = u_n.$$

证. 由 τ 的分布可得

$$\text{左式} = \mathbb{P}(\tau > 2n) = 1 - \mathbb{P}(\tau \leq 2n) = 1 - \sum_{k=1}^n \frac{u_k}{2k-1}.$$

往证

$$u_n = 1 - \sum_{k=1}^n \frac{u_k}{2k-1}.$$



(利用数学归纳法)

- 1 由 $u_1 = 1/2$, 当 $n = 1$ 时上式显然成立.
- 2 下面假设 $n - 1$ 时上式成立, 有

$$\begin{aligned} 1 - \sum_{k=1}^n \frac{u_k}{2k-1} &= 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{u_k}{2k-1} - \frac{u_n}{2n-1} \\ &= u_{n-1} - \frac{u_n}{2n-1} = u_n. \end{aligned}$$

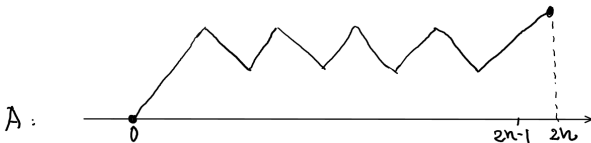
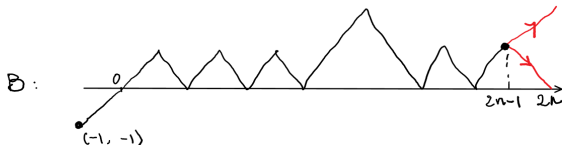
完成证明.



引理 3.1.1

$$2) \quad \mathbb{P}(S_1 > 0, S_2 > 0, \dots, S_{2n-1} > 0, S_{2n} > 0) = \frac{1}{2} u_n.$$

$$3) \quad \mathbb{P}(S_1 \geq 0, S_2 \geq 0, \dots, S_{2n-1} \geq 0, S_{2n} \geq 0) = u_n.$$



0 点首中时 τ 的分布

定理 3.1.2

对任何 $n \geq 1$,

$$(1) \mathbb{P}(\tau = 2n) = u_{n-1} - u_n = \frac{1}{2n-1} u_n, \quad n \geq 1.$$

$$(2) u_n = \sum_{r=1}^n \mathbb{P}(\tau = 2r) \cdot u_{n-r}.$$



证. (1)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\tau = 2n) &= \mathbb{P}(S_1 \neq 0, \dots, S_{2n-1} \neq 0, S_{2n} = 0) \\ &= \mathbb{P}(S_1 \neq 0, \dots, S_{2n-2} \neq 0) \\ &\quad - \mathbb{P}(S_1 \neq 0, \dots, S_{2n-1} \neq 0, S_{2n} \neq 0) \\ &= \mathbb{P}(S_{2n-2} = 0) - \mathbb{P}(S_{2n} = 0).\end{aligned}$$

公式 (2) 由全概率公式推出.



注. 由 Stirling 公式: $n! \sim n^n \cdot e^{-n} \sqrt{2\pi n}$,

$$\text{当 } n \text{ 充分大时, } u_n = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \sim \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \rightarrow 0.$$

推论 1:

$\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$, 即 w.p.1, 在有限的时间内将回到原点.

另一方面, 利用第一章习题 4 的结果,

$$\mathbb{E}[\tau] = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(\tau > 2n) = \sum_{n \geq 0} u_n \sim \sum_{n \geq 0} \frac{1}{\sqrt{n\pi}} = \infty.$$

推论 2:

$\mathbb{E}\tau = \infty$, 也就是说原点的平均返回时间是无限的.



(3) 0 点末离时的分布:

L_{2n} : 表示长度为 $2n$ 的格点轨道最后遇到 0 的时间, 即

$$L_{2n} := \sup\{k \leq 2n : S_k = 0\},$$

称为 0 点的(在时刻 $2n$ 前的)末离时.

- 显然必是偶数.

定理 3.1.3

$$\mathbb{P}(L_{2n} = 2k) = u_k \cdot u_{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n.$$



证. 令 $S'_j := \sum_{i=1}^j X_{2k+i}$. 显然

$$\begin{aligned}\{L_{2n} = 2k\} &= \{S_{2k} = 0, S_{2k+1} \neq 0, S_{2k+2} \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0\} \\ &= \{S_{2k} = 0, S'_1 \neq 0, S'_2 \neq 0, \dots, S'_{n-k} \neq 0\},\end{aligned}$$

因此由独立性和前面的引理,

$$\begin{aligned}& \mathbb{P}(L_{2n} = 2k) \\ &= \mathbb{P}(S_{2k} = 0) \mathbb{P}(S'_1 \neq 0, S'_2 \neq 0, \dots, S'_{n-k} \neq 0) \\ &= u_k \cdot u_{n-k}.\end{aligned}$$



(4) 集合的滞留时的分布:

 σ_{2n} : 0 到 $2n$ 时段正的时段数, 即

$$\sigma_{2n} := \sum_{k=1}^{2n} 1_{\{S_{k-1} \geq 0, S_k \geq 0\}},$$

称为随机游动在正集上的逗留时,

- 显然 σ_{2n} 也必是偶数.

定理 3.1.4

$$\mathbb{P}(\sigma_{2n} = 2k) = u_k \cdot u_{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n.$$



证. (归纳法)

① 当 $n = 1$ 时, 显然

$$\mathbb{P}(\sigma_2 = 0) = \mathbb{P}(\sigma_2 = 2) = 1/2,$$

结论成立.

② 由前面引理知

$$\mathbb{P}(\sigma_{2n} = 0) = \mathbb{P}(\sigma_{2n} = 2n) = u_{2n},$$

结论成立, 故只需对 $0 < k < n$ 证明即可.



设

$$\mathbb{P}(\sigma_{2m} = 2k) = u_k \cdot u_{m-k}, \quad m < n, \quad 0 < k < m.$$

当 $0 < k < n$ 时, 由全概率公式和归纳假设,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\sigma_{2n} = 2k) &= \sum_{r=1}^n \mathbb{P}(\sigma_{2n} = 2k | \tau = 2r) \mathbb{P}(\tau = 2r) \\ &= \sum_{r=1}^n \frac{1}{2} (\mathbb{P}(\sigma_{2n-2r} = 2k - 2r) + \mathbb{P}(\sigma_{2n-2r} = 2k)) \mathbb{P}(\tau = 2r) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n (u_{k-r} u_{n-k} + u_k u_{n-r-k}) \mathbb{P}(\tau = 2r) \\ &= \frac{1}{2} (u_k u_{n-k} + u_k u_{n-k}). \end{aligned}$$

定理得证.



反正弦律

令

$$f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}, \quad x \in (0, 1),$$

注意到由 Stirling 公式, 有

$$u_k \cdot u_{n-k} \sim \frac{1}{n} f(k/n).$$

从而

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\sigma_{2n}/2n < x) &= \sum_{k < xn} u_k \cdot u_{n-k} \sim \sum_{k/n < x} \frac{1}{n} f(k/n) \\ \longrightarrow \int_0^x f(y) dy &= \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}, \end{aligned}$$



反正弦律

当 n 充分大时, $L_{2n}/2n$ 和 $\sigma_{2n}/2n$ 的分布函数近似为

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \frac{1}{\pi \sqrt{y(1-y)}} dy \\ &= \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}, \quad x \in (0, 1). \end{aligned}$$

称此现象为服从反正弦律.

注. 由密度函数的形状也可以发现,

L_{2n} 和 σ_{2n} 的分布都比较集中在两端.



例 2.2.3 (续)

假设甲乙两人游戏, 每局甲赢 1 元的概率是 p 输 1 元的概率是 $q = 1 - p$. 再假设一开始甲手里是 0 元, 记 S_n 为 n 局之后甲拥有的钱数.

1. 计算条件概率

$$\mathbb{P}(S_8 = 4 | S_1 = 1, S_3 = 1, S_4 = 2) \text{ 及 } \mathbb{P}(S_8 = 4 | S_4 = 2),$$

2. 试了解二者是否相等.



事实上,

- $\mathbb{P}(S_8 = 4 | S_1 = 1, S_3 = 1, S_4 = 2)$
 $= \mathbb{P}(S_8 - S_4 = 2 | S_1 = 1, S_3 = 1, S_4 = 2)$
 $= \mathbb{P}(S_8 - S_4 = 2) = 4p^3q,$
- $\mathbb{P}(S_8 = 4 | S_4 = 2) = \mathbb{P}(S_8 - S_4 = 2 | S_4 = 2)$
 $= \mathbb{P}(S_8 - S_4 = 2) = 4p^3q.$

#



$X = \{X_n, n \geq 0\}$: 以至多可列集 E 为状态空间的离散时间过程.

定义 3.2.1

若对任意 $n \geq 0, i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, i, j \in E$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) \\ &= \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i), \end{aligned}$$

则称 $\{X_n, n \geq 0\}$ 为马氏链 (Markov 链).

注. (习题 6) 对一个马氏链 $\{X_n, n \geq 0\}$, 证明:

$$\mathbb{P}(X_n = j | X_{n_1} = i_1, \dots, X_{n_k} = i_k) = \mathbb{P}(X_n = j | X_{n_k} = i_k),$$

当 $n_1 < n_2 < \dots < n_k < n$ 时皆成立.



定义 3.2.1 (续)

- 对任意 $i, j \in E, n \geq 0$, 称

$$P_{ij}(n) := \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

为过程在 n 时刻的一步转移概率.

- 若 $P_{ij}(n) = P_{ij}$ 与 n 无关, 则称 X 为时齐马氏链.

记 $\mathbf{P} = (P_{ij})$, 称为 X 的一步转移概率矩阵, 简称转移矩阵,
其阶数由 E 中元素个数 $|E|$ 决定.

在本章节中, 我们仅考虑时齐马氏链.



注. 转移概率与转移矩阵是一一对应的.

- 转移矩阵的元素即转移概率, 满足

① 非负性:

对任意 $i, j \in E$, $P_{ij} \geq 0$;

② 正则性:

对任意 $i \in E$, $\sum_{j \in E} P_{ij} = 1$.

一般的, 元素满足上述两条的矩阵也称为随机矩阵.

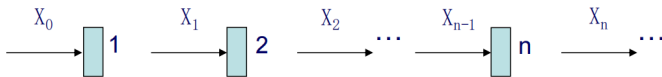
(可能是一个无限行与列的矩阵.)

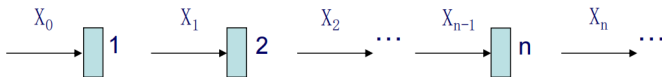
- 转移函数也可以形象地用图表示, 称为状态转移图.



例 1. (0-1 传输系统)

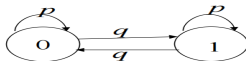
只传 0 和 1 的串联系统中, 设每一级的传真率为 p , 误码率为 $q = 1 - p$. 用 X_0 表示第一级的输入, X_n 表示第 n 级的输出, $n \geq 1$.





可见 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是一个以 $E = \{0, 1\}$ 为状态空间的时齐马氏链, 转移概率

$$p_{ij} = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) = \begin{cases} p, & j = i, \\ q, & j \neq i, \end{cases} \quad i, j = 0, 1.$$



(状态转移图)



例 2. 独立重复地掷骰子, 用 X_n 表示第 n 次掷出的点数, 令

$$Y_n = X_{n+1} + X_{n+2}, n \geq 0.$$

(1) 计算条件概率

- $\mathbb{P}(Y_2 = 12 | Y_0 = 2, Y_1 = 7),$
- $\mathbb{P}(Y_2 = 12 | Y_1 = 7);$

(2) 判断 $\{Y_n\}$ 是否是马氏链?



(1)

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(Y_2 = 12 | Y_0 = 2, Y_1 = 7) \\ &= \mathbb{P}(X_3 = X_4 = 6 | X_1 = 1 = X_2, X_3 = 6) = \frac{1}{6}, \\ & \mathbb{P}(Y_2 = 12 | Y_1 = 7) = \frac{\mathbb{P}(Y_2 = 12, Y_1 = 7)}{\mathbb{P}(Y_1 = 7)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X_2 = 1, X_3 = X_4 = 6)}{\mathbb{P}(X_2 + X_3 = 7)} = \frac{(\frac{1}{6})^3}{\frac{6}{36}} = \frac{1}{36}. \end{aligned}$$

(2) 因为

$$\mathbb{P}(Y_2 = 12 | Y_0 = 2, Y_1 = 7) \neq \mathbb{P}(Y_2 = 12 | Y_1 = 7),$$

所以 $\{Y_n\}$ 不是马氏链.

#



两个条件概率公式

引理 3.2.1

设 A, B, C 为三个随机事件, 则

$$\mathbb{P}(BC|A) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(C|AB).$$

引理 3.2.2

设 A, B, C 为三个随机事件, 则

$$\mathbb{P}(C|AB) = \mathbb{P}(C|B) \Leftrightarrow \mathbb{P}(AC|B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(C|B).$$

此时, 称 A, C 关于 B 有条件独立性.



n 步转移概率

对于 $n \geq 1, m \geq 0, i, j \in E$,

$\mathbb{P}(X_{n+m} = j | X_m = i) =: P_{ij}^{(n)}$: 与 m 无关, 是 n 步转移概率.

相应的, $P_{ij}^{(n)}$ 是 n 步转移概率矩阵.

- n 步转移概率矩阵也是随机矩阵;

- 显然 $P_{ij}^{(1)} = P_{ij}$, $P_{ij}^{(0)} \equiv \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$

(P_{ij}) 是一步转移概率矩阵, $(P_{ij}^{(0)}) = I$ 是单位矩阵.



Chapman-Kolmogorov 方程

定理 3.3.1

对任意 $n, m \geq 0, i, j \in E$,

$$P_{ij}^{(n+m)} = \sum_k P_{ik}^{(n)} P_{kj}^{(m)} \quad \text{或} \quad \mathbf{P}^{(n+m)} = \mathbf{P}^{(n)} \cdot \mathbf{P}^{(m)}.$$

▷ (直观意义)

从 i 发经 $n+m$ 步到达 j 可分为两个阶段走:

- 先从 i 发经 n 步到 k ,
- 再从 k 经 m 步到达 j .



证. 由引理 3.2.1 与 n 时刻的马氏性,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+m} = j | X_0 = i) &= \sum_{k \in E} \mathbb{P}(X_{n+m} = j, X_n = k | X_0 = i) \\ &= \sum_{k \in E} \mathbb{P}(X_{n+m} = j | X_n = k, X_0 = i) \mathbb{P}(X_n = k | X_0 = i) \\ &= \sum_{k \in E} P_{kj}^{(m)} P_{ik}^{(n)}. \end{aligned}$$

□

有如下一个推论.

n 步转移矩阵可以由一步转移矩阵的 n 次幂得到:

$$\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^n.$$



有限维分布

定理 3.2.1

以 $p_i := \mathbb{P}(X_0 = i)$ ($i \in E$) 为初始分布的 Markov 链 X 的有限维分布: $i_0, i_1, \dots, i_n \in E$,

$$\mathbb{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) = p_{i_0} P_{i_0 i_1} P_{i_1 i_2} \cdots P_{i_{n-1} i_n},$$

即由初始分布和转移概率完全确定.

(由乘法公式及马氏性即可证明.)



命题.

$$(1) \text{ 对任意 } n \geq 1, \mathbb{P}(X_n = j) = \sum_i \mathbb{P}(X_0 = i) P_{ij}^{(n)};$$

$$(2) \text{ 对任意 } n_1 < n_2 < \cdots < n_k,$$

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X_{n_1} = i_1, X_{n_2} = i_2, \cdots, X_{n_k} = i_k) \\ &= \mathbb{P}(X_{n_1} = i_1) P_{i_1 i_2}^{(n_2 - n_1)} \cdots P_{i_{k-1} i_k}^{(n_k - n_{k-1})}. \end{aligned}$$

注. 从数学上看, 可视一随机矩阵为一个马氏链:

有限维分布完全由初始分布和一步转移概率确定.



命题的证明.

- (1) 利用全概率公式即可;
- (2) 由乘法公式,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X_{n_1} = i_1, X_{n_2} = i_2, \dots, X_{n_k} = i_k) \\ &= \mathbb{P}(X_{n_1} = i_1) \mathbb{P}(X_{n_2} = i_2 | X_{n_1} = i_1) \cdots \\ & \quad \mathbb{P}(X_{n_k} = i_k | X_{n_1} = i_1, \dots, X_{n_{k-1}} = i_{k-1}) \\ &= \mathbb{P}(X_{n_1} = i_1) P_{i_1 i_2}^{(n_2 - n_1)} \cdots P_{i_{k-1} i_k}^{(n_k - n_{k-1})}. \end{aligned}$$



相关计算主要是状态转移的概率规律, 可借用形象的状态转移图.

例 3.2.3 设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是具有三个状态 0, 1, 2 的时齐 Markov 链, 一步转移矩阵为

$$\begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

初始分布为 $\mathbb{P}(X_0 = i) = 1/3, i = 0, 1, 2$, 试求:

- (1) $\mathbb{P}(X_0 = 0, X_1 = 1, X_4 = 1)$;
- (2) $\mathbb{P}(X_2 = 1, X_4 = 1, X_5 = 0 | X_0 = 0)$;
- (3) $\mathbb{P}(X_2 = 1, X_4 = 1, X_5 = 0)$.



例 3.2.4 设 $\{S_n, n \geq 0\}$ 是一个从零出发的马氏链. 相应的转移矩阵满足

$$P_{i,i+1} = p, P_{i,i-1} = q, i \in \mathbb{Z}.$$

可证, $\{|S_n|, n \geq 0\}$ 也是一条 Markov 链:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(|S_{n+1}| = i+1 \mid |S_n| = i, |S_{n-1}|, \dots, |S_1|) \\ &= \mathbb{P}(|S_{n+1}| = i+1 \mid |S_n| = i), \forall i > 0. \end{aligned}$$

首先, 证明

$$\mathbb{P}(S_n = i \mid |S_n| = i, |S_{n-1}| = i_{n-1}, \dots, |S_1| = i_1) = \frac{p^i}{p^i + q^i}.$$



事实上, 令 $i_0 = 0$, 取

$$j := \max\{k = 0, 1, \dots, n-1 : i_k = 0\},$$

则

$$\begin{aligned} \text{左式} &= \mathbb{P}(S_n = i \mid |S_n| = i, |S_{n-1}| = i_{n-1}, \dots, |S_{j+1}| = i_{j+1}, S_j = 0) \\ &= \frac{\mathbb{P}(S_n = i, |S_{n-1}| = i_{n-1}, \dots, |S_{j+1}| = i_{j+1}, S_j = 0)}{\mathbb{P}(S_n = \pm i, |S_{n-1}| = i_{n-1}, \dots, |S_{j+1}| = i_{j+1}, S_j = 0)} \\ &= \frac{p^{\frac{n-j}{2} + \frac{i}{2}} q^{\frac{n-j}{2} - \frac{i}{2}}}{p^{\frac{n-j}{2} + \frac{i}{2}} q^{\frac{n-j}{2} - \frac{i}{2}} + p^{\frac{n-j}{2} - \frac{i}{2}} q^{\frac{n-j}{2} + \frac{i}{2}}} \\ &= \text{右式}. \end{aligned}$$



$\{|S_n|, n \geq 0\}$ 是马氏链的证

取 $A = \{|S_n| = i, |S_{n-1}|, \dots, |S_1|\}$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(|S_{n+1}| = i+1 \mid |S_n| = i, |S_{n-1}|, \dots, |S_1|) \\ &= \frac{\mathbb{P}(|S_{n+1}| = i+1, S_n = i; A) + \mathbb{P}(|S_{n+1}| = i+1, S_n = -i; A)}{\mathbb{P}(A)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X_{n+1} = 1, S_n = i; A) + \mathbb{P}(X_{n+1} = -1, S_n = -i; A)}{\mathbb{P}(A)} \\ &= \mathbb{P}(X_{n+1} = 1) \mathbb{P}(S_n = i \mid A) + \mathbb{P}(X_{n+1} = -1) \mathbb{P}(S_n = -i \mid A) \\ &= \frac{p^{i+1} + q^{i+1}}{p^i + q^i}, \quad i > 0. \end{aligned}$$



所以 $\{|S_n|, n \geq 1\}$ 一条 Markov 链, 相应的转移概率为

$$\begin{cases} \tilde{P}_{i,i+1} = \frac{p^{i+1} + q^{i+1}}{p^i + q^i} = 1 - \tilde{P}_{i,i-1} & i \geq 1, \\ \tilde{P}_{0,1} = 1. \end{cases}$$

#

注. 对于从非零点出发的 Markov 链则没有这个结果.



获得Markov链的模式

定理 3.2.2

设整数值随机变量序列 $\{X_n, n \geq 0\}$ 满足如下两个条件:

- (1) $X_n = f(X_{n-1}, \xi_n)$;
- (2) $\{\xi_n, n \geq 1\}$ 是独立同分布的随机序列且 X_0 与 $\{\xi_n, n \geq 1\}$ 也相互独立,

则 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是 Markov 链, 其转移概率为

$$P_{ij} = \mathbb{P}(f(i, \xi_1) = j).$$



证. 只需证

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, \dots, X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n),$$

事实上, 注意到 ξ_{n+1} 与 X_0, X_1, \dots, X_n 相互独立,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, \dots, X_0 = i_0) \\ &= \mathbb{P}(f(X_n, \xi_{n+1}) = i_{n+1} | X_n = i_n, \dots, X_0 = i_0) \\ &= \mathbb{P}(f(i_n, \xi_{n+1}) = i_{n+1} | X_n = i_n, \dots, X_0 = i_0) \\ &= \mathbb{P}(f(i_n, \xi_{n+1}) = i_{n+1}), \end{aligned}$$

另外,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n) = \mathbb{P}(f(i_n, \xi_{n+1}) = i_{n+1}).$$



例 3.3.1 (A mouse in a maze) 方形迷津中, mouse 指定在 1 号格子, 假设 cat 耐心地等在 7 号格子, 9 号中有一块 cheese,

$$\mathbb{P}(\text{mouse 进入相邻格子}) = 1/k, k = 2, 3, 4.$$

再假设一旦找到 cheese 或碰到 cat 就永远呆在那里,
 X_n 表示 mouse 换了 n 个格子后所在位置.

求概率 $P_{17}^{(2)}, P_{17}^{(4)}$.



解. $\{X_n, n \geq 0\}$ 是 Markov 链, $E = \{1, 2, \dots, 9\}$. 相应转移矩阵为

$$\begin{pmatrix} & 1/2 & & 1/2 & & & & & \\ 1/3 & & 1/3 & & 1/3 & & & & \\ & 1/2 & & & & 1/2 & & & \\ 1/3 & & & & 1/3 & & 1/3 & & \\ & 1/4 & & 1/4 & & 1/4 & & 1/4 & \\ & & 1/3 & & 1/3 & & & & 1/3 \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & 1/3 & & 1/3 & & 1/3 & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$



注意到, 若 n 为奇数, $P_{17}^{(n)} = 0 = P_{19}^{(n)}$. n 是偶数时,

$$P_{17}^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{1}{3} = \frac{1}{6},$$

$$\begin{aligned} P_{17}^{(4)} &= \frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{2} \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{4} \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{4} \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{2} \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{4} \frac{1}{3} \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{4} \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \frac{1}{3} \\ &= \frac{5}{18}, \end{aligned}$$

...

电脑计算结果: 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $P_{17}^{(n)} \rightarrow 0.6$, $P_{19}^{(n)} \rightarrow 0.4$.

#



等价关系: 相通性

对于 Markov 链 $\{X_n, n \geq 0\}$.

定义 3.3.1

考虑任意两个状态 $i, j \in E$

- 若存在 $n \geq 0$ 使得 $P_{ij}^{(n)} > 0$, 则称 i 到 j 可达, 记作 $i \rightarrow j$.
若 $P_{ij}^{(n)} = 0, \forall n \geq 1$, 则称 i 到 j 不可达, 记作 $i \nrightarrow j$.
- 若 $i \rightarrow j$ 且 $j \rightarrow i$, 则称 i 与 j 相通, 记作 $i \leftrightarrow j$.

下面的命题说明可达是传递的.



命题 3.3.1

若 $i \rightarrow j$ 且 $j \rightarrow k$, 则 $i \rightarrow k$.

证. 由假设, 存在 $n, m \geq 0$, 使得

$$P_{ij}^{(n)} > 0, P_{jk}^{(m)} \geq 0.$$

由 C-K 方程, 有

$$P_{ik}^{(n+m)} = \sum_{\ell} P_{i\ell}^{(n)} P_{\ell k}^{(m)} > P_{ij}^{(n)} P_{jk}^{(m)} > 0.$$



下面的命题说明相通是传递的也是对称的. 相通性是等价关系.

命题 3.3.2

- (1) (自反性) $i \leftrightarrow i$.
- (2) (对称性) 若 $i \leftrightarrow j$, 则 $j \leftrightarrow i$; $i \leftrightarrow i$.
- (3) (传递性) 若 $i \leftrightarrow j$ 且 $j \leftrightarrow k$, 则 $i \leftrightarrow k$.



状态的分类

利用相通关系, 可将相通的状态归为一个等价类.
每个状态属于且只属于一个类. 或者说,

状态空间可分为不交等价类的并.

定义 3.3.2

若 Markov 链的状态空间只存在一个等价类, 即一切状态彼此相通, 则称该 Markov 链是不可约的.

(如书中例 3.2.3)



例 3.3.2 考虑状态空间 $E = \{0, 1, 2, \dots, N\}$, 转移矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ q & 0 & p & & \\ & q & 0 & p & \\ & \dots & & & \\ & & & q & 0 & p \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

的马氏链, 其中, $p, q > 0$, $p + q = 1$. 此链可分成 3 类:

$$\{0\}, \{N\}, \{1, 2, \dots, N-1\}.$$

#



称子集 $C \subset E$ 是闭的, 若 $\forall x \in C, y \notin C$, 有 $p_{xy} = 0$.
等价于

$$\forall x \in C, \text{ 有 } \sum_{y \in C} p_{xy} = 1.$$

注. 闭集中的任何状态均不可达闭集外的状态. 故

X 不可约当且仅当 E 没有非平凡闭子集;

另外, 限制在一个闭集上的马氏链仍然是一个马氏链.



周期性

定义 3.3.3

若集合 $\{n \geq 1 : P_{ii}^{(n)} > 0\}$ 非空, 则称该集合的最大公约数

$$d(i) := \text{GCD}\{n \geq 1 : P_{ii}^{(n)} > 0\}$$

为 i 的周期.

- ▶ 若 $d(i) > 1$, 则称 i 是周期的;
- ▶ 若 $d(i) = 1$, 则称 i 是非周期的.



例 3.3.3 (直线上无限制随机游动) 质点在数轴上做随机游动, 每单位时间移动一次, 或左或右或原地不动. 设每次移动都相互独立, X_n 表示经 n 次移动后的位置, 则 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是一条 Markov 链. 转移概率为

$$P_{i,i+1} = p, P_{i,i-1} = q, P_{i,i} = r \quad (p + q + r = 1).$$

- ▶ 当 $r = 0, 0 < p < 1$ 时, $\{n \geq 1 : P_{00}^{(n)} > 0\} = \{2, 4, 6, \dots\}$, 所以 $d(0) = 2$, 也就是说, 0 是周期的.
- ▶ 当 $p, q, r > 0$ 时, $\{n \geq 1 : P_{00}^{(n)} > 0\} = \{1, 2, 3, \dots\}$, 所以 $d(0) = 1$, 即此时 0 是非周期的.

#



周期性是个类性质.

命题 3.3.3

若 $i \leftrightarrow j$, 则 $d(i) = d(j)$.

证. 令 $l, n \geq 0$ 满足 $P_{ij}^{(n)} > 0, P_{ji}^{(l)} > 0$, 则

$$P_{ii}^{(l+n)} \geq P_{ij}^{(n)} P_{ji}^{(l)} > 0, \quad P_{jj}^{(l+n)} \geq P_{ji}^{(l)} P_{ij}^{(n)} > 0,$$

也就是说, $l+n$ 可同时被 $d(i), d(j)$ 整除. 若 $P_{ii}^{(m)} > 0$, 则

$$P_{jj}^{(l+m+n)} \geq P_{ji}^{(l)} P_{ii}^{(m)} P_{ij}^{(n)} > 0 \implies d(j) | l+m+n,$$

所以 $d(j) | m$, 从而 $d(j)$ 整除 m 的最大公约数, i.e.,
 $d(j) | d(i)$. 同理 $d(i) | d(j)$, 故有

$$d(i) = d(j).$$



例 1. 考虑状态空间 $E = \{0, 1, 2, 3\}$, 转移矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

讨论状态的周期性. 事实上,

由 $p_{33} > 0$ 可知 $d(3) = 1$,

即状态 3 非周期, 而各状态互达, 所以所有状态都是非周期的, 该链是个非周期链. \sharp



几个重要的概率:

引入状态 $j \in E$ 的首中时:

$$T_j := \min\{n \geq 1 : X_n = j\} \text{ (约定 } \min \emptyset = \infty \text{)}.$$

- ① 对任意 n , 记 $f_{ij}^{(n)}$ 为 i 发经 n 步首次到达 j 的概率:

$$\begin{aligned} f_{ij}^{(n)} &:= \mathbb{P}(T_j = n | X_0 = i) \\ &= \mathbb{P}(X_n = j, X_k \neq j, k = 1, 2, \dots, n-1 | X_0 = i), \\ f_{ij}^{(0)} &\equiv 0. \end{aligned}$$

- ② $f_{ij} := \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}(T_j < \infty | X_0 = i) :$

i 发经有限步最终到达 j 的概率.



常返性与暂留性

注. $0 \leq f_{ij}^{(n)} \leq P_{ij}^{(n)} \leq f_{ij} \leq 1$.

当 $i \neq j$ 时, $i \rightarrow j$ 当且仅当 $f_{ij} > 0$.

定义 3.3.4

- 若 $f_{ii} = 1$, 则称 i 为常返状态, 即

从 i 出发以概率 1 在有限时间内返回 i ;

- 若 $f_{ii} < 1$, 则称 i 为非常返状态/暂留状态, 即

从 i 出发以正概率不再返回 i .

(见书中例 3.3.4)



定理 3.3.2:(判定定理)

- i 常返的充要条件是 $\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \infty$. 等价地,
- i 暂留的充要条件是

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \frac{1}{1 - f_{ii}} < \infty.$$



证. 先考虑暂留态 i , 则 $f_{ii} < 1$. 由 Markov 性,

一旦回到 i 过程又从头开始, 其发展只依赖于当前.

记

$$K \equiv K_i := \sum_{n \geq 1} I_n, \quad I_n := \begin{cases} 1, & X_n = i, \\ 0, & X_n \neq i, \end{cases}$$

则 K 是参数为 $1 - f_{ii}$ 的几何分布随机变量. 由几何分布的性质, 有

$$\mathbb{P}(K \geq k | X_0 = i) = (f_{ii})^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

以及 $\mathbb{E}[K | X_0 = i] = \frac{1}{1 - f_{ii}} < \infty$. 故

$$\sum_{n \geq 1} P_{ii}^{(n)} = \sum_{n \geq 1} \mathbb{E}[I_n | X_0 = i] = \mathbb{E}[K | X_0 = i] < \infty.$$



反过来, 若 $\sum_{n \geq 1} P_{ii}^{(n)} < \infty$. 用反证法,

假设 i 常返, 则 $f_{ii} = 1$. 由 Markov 性, 过程不断返回 i , 所以

$$\mathbb{E}[K | X_0 = i] = \infty.$$

与 $\sum_{n \geq 1} P_{ii}^{(n)}$ 收敛矛盾, 所以 i 暂留. □



定理 3.3.1 中两个条件的直观意义

- 若 i 常返 $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \infty$

: 以概率 1 会有无穷多次回到 i , $\mathbb{P}^i(\limsup_{n \rightarrow \infty} \{X_n = i\}) = 1$,

- 若 i 非常返 $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} < \infty$

: 只有有限次回到 i , $\mathbb{P}^i(\limsup_{n \rightarrow \infty} \{X_n = i\}) = 0$.

注. $\sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \mathbb{E}^i[K_i]$ (: 表示系统从 i 出发回到 i 的平均次数)

$$\begin{cases} = \infty, & \text{若 } i \text{ 常返,} \\ \left(= \frac{1}{1 - f_{ii}} \right) < \infty, & \text{若 } i \text{ 非常返.} \end{cases}$$



推论 3.3.1

若 i 常返且 $i \rightarrow j$, 则 j 常返且 $f_{ji} = 1$.

注. 存在 k , 使得

$$0 < P_{ij}^{(k)} = \mathbb{P}^i(X_k = j) = \mathbb{P}^i(X_k = j, \bigcup_{n>k} \{X_n = i\}),$$

而右式中的任意可列并可以写成不交可列并,

$$\begin{aligned} \bigcup_{n>k} \{X_n = i\} &= \{X_{k+1} = i\} \cup \{X_{k+1} \neq i, X_{k+2} = i\} \cup \cdots \\ &\quad \cup \{X_{k+1} \neq i, X_{k+2} \neq i, \cdots, X_{k+n-1} \neq i, X_{k+n} = i\} \cup \cdots \\ &= \bigcup_{n \geq 1} \{X_{k+1} \neq i, X_{k+2} \neq i, \cdots, X_{k+n-1} \neq i, X_{k+n} = i\}. \end{aligned}$$



证. 假设 i 常返且 $i \rightarrow j$, 那么存在 k ,

$$\begin{aligned}
 0 < P_{ij}^{(k)} &= \mathbb{P}^i(X_k = j, \bigcup_{n \geq 1} \{X_{k+1} \neq i, \dots, X_{k+n-1} \neq i, X_{k+n} = i\}) \\
 &= \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}^i(X_k = j, X_{k+1} \neq i, X_{k+2} \neq i, \dots, X_{k+n-1} \neq i, X_{k+n} = i) \\
 &= \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}^i(X_{k+1} \neq i, X_{k+2} \neq i, \dots, X_{k+n-1} \neq i, X_{k+n} = i | X_k = j) \\
 &\quad \cdot \mathbb{P}^i(X_k = j) \\
 &= \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}^j(X_1 \neq i, X_2 \neq i, \dots, X_{n-1} \neq i, X_n = i) \mathbb{P}^i(X_k = j) \\
 &= \sum_{n \geq 1} f_{ji}^{(n)} \cdot P_{ij}^{(k)} = f_{ji} \cdot P_{ij}^{(k)},
 \end{aligned}$$

倒数第二个等号的依据是 Markov 链的时间齐性.



证. (续) 故 $f_{ji} = 1$ 得证, 且 j 可达 i . 存在 m, n 使得

$$P_{ji}^{(m)} > 0, P_{ij}^{(n)} > 0,$$

从而对任意 $s > 0$, $P_{jj}^{(m+n+s)} \geq P_{ji}^{(m)} P_{ii}^{(s)} P_{ij}^{(n)}$. 所以

$$\begin{aligned} \sum_{s \geq 1} P_{jj}^{(m+n+s)} &\geq \sum_{s \geq 1} P_{ji}^{(m)} P_{ii}^{(s)} P_{ij}^{(n)} \\ &= P_{ji}^{(m)} P_{ij}^{(n)} \sum_{s \geq 1} P_{ii}^{(s)} = \infty, \end{aligned}$$

可知 $\sum_{k \geq 1} P_{jj}^{(k)} = \infty$, j 常返.



正常返与零常返

注. 当 $f_{ii} = \mathbb{P}(T_{ii} < \infty) = 1$ 也就是 i 为常返态时,
 $\{f_{ii}^{(n)}, n \geq 1\}$ 是状态 i 首次返回时间 T_{ii} 的概率分布.

记 $\mu_{ii} := \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)} = \mathbb{E}[T_{ii}]$: i 的平均回转时间.

定义 3.3.5

设状态 i 是常返的.

- 若 $\mu_{ii} < \infty$, 则称 i 为正(positive)常返;
- 若 $\mu_{ii} = \infty$, 则称 i 为零(null)常返.



- 注.
- ① 正常返态返回的速度快于零常返态返回的速度.
 - ② 对于仅有有限多个状态的 Markov 链, μ_{ii} 总是有限的.
所以, 只有在有无穷可列多个状态时, 才可能出现零常返态.
 - ③ 当状态数目不大时, 直接的计算分析就可以把状态分类弄清楚, 当状态数目很大时, 则需借助计算机.

(见书中例 3.3.5)



补充例 (续) 考虑状态空间 $E = \{0, 1, 2, 3\}$, 转移矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix},$$

试求各状态的常返性.

事实上,

$$f_{00}^{(1)} = 0, f_{00}^{(2)} = p_{03}p_{30} = 1/4, f_{00}^{(3)} = p_{03}p_{33}p_{30} = 1/8,$$

$$f_{00}^{(n)} = p_{03}p_{33}^{(n-2)}p_{30} + p_{01}p_{12}p_{23}p_{33}^{(n-4)}p_{30} = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-2}},$$

有 $f_{00} = \sum_{n \geq 1} f_{00}^{(n)} = 1$, 所以是常返链. 而

$$\mu_{00} = 4 \Rightarrow \text{可知是正常返链.}$$



Polya 定理: 考虑无限制的 SRW

(1) 设 $E = \mathbf{Z}$, 转移概率

$$P_{i,i+1} = p = 1 - P_{i,i-1} = 1 - q, \quad i = 0, \pm 1, \dots \quad (0 < p < 1).$$

一切状态显然都相通, 要么全是暂留要么全是常返.

$$\forall i, \quad P_{ii}^{(2n)} = C_{2n}^n p^n q^n, \quad P_{ii}^{(2n+1)} = 0.$$

由 Stirling 公式可知

$$C_{2n}^n \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}, \quad \text{所以 } P_{ii}^{(2n)} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} (pq)^n.$$

故

$$\begin{cases} \text{当 } p \neq \frac{1}{2} \text{ 时, } i \text{ 为非常返,} \\ \text{当 } p = \frac{1}{2} \text{ 时, } i \text{ 为常返.} \end{cases}$$

注. P73 定理 3.1.2 的推论实际已经证明是零常返, 其中转移概率的求解是用的古典方法.



定理 3.3.3: (Polya 定理)

对于 \mathbb{R}^d 上的对称随机游动,

- 当 $d = 1, 2$ 时是常返, 而且是零常返的;
- 当 $d \geq 3$ 时是暂留的.

“海阔凭鱼跃, 天高任鸟飞”的概率解读.



下列定理说明各概率分布之间的转换关系.

定理 3.3.4

对任意 $i, j \in E$, $n \geq 1$,

$$(1) \text{ (首达概率公式:)} \quad P_{ij}^{(n)} = \sum_{\ell=1}^n f_{ij}^{(\ell)} P_{jj}^{(n-\ell)};$$

$$(2) \quad f_{ij}^{(n)} = \sum_{k \neq j} P_{ik} f_{kj}^{(n-1)} \cdot 1_{\{n>1\}} + P_{ij} \cdot 1_{\{n=1\}}, \text{ 即}$$

$$\begin{cases} f_{ij}^{(1)} = P_{ij}, \\ f_{ij}^{(n)} = \sum_{k \neq j} P_{ik} f_{kj}^{(n-1)}, \quad n = 2, 3, \dots; \end{cases}$$

$$(3) \quad i \rightarrow j \Leftrightarrow f_{ij} > 0; \quad \text{进一步的, } i \leftrightarrow j \Leftrightarrow f_{ij} > 0 \text{ 且 } f_{ji} > 0.$$



证. (1) 注意到当 $X_n = j$ 时, $T_j \leq n$.

$$\begin{aligned} P_{ij}^{(n)} &= \mathbb{P}^i(X_n = j) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}^i(T_j = k, X_n = j) \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}^i(X_k = j, X_v \neq j, 0 < v < k, X_n = j) \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}^i(X_k = j, X_v \neq j, 0 < v < k) \mathbb{P}(X_n = j | X_k = j) \\ &= \sum_{k=1}^n f_{ij}^{(k)} P_{jj}^{(n-k)}. \end{aligned}$$



(2) 考虑 $n > 1$ 的情形. 由于

$$\begin{aligned} & \{T_{ij} = n\} \\ &= \bigcup_{k \neq j} \{X_1 = k, X_l \neq j, 2 \leq l \leq n-1, X_n = j\}, \end{aligned}$$

有

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}^i(T_{ij} = n) \\ &= \sum_{k \neq j} \mathbb{P}^i(X_1 = k, X_l \neq j, 2 \leq l \leq n-1, X_n = j) \\ &= \sum_{k \neq j} \mathbb{P}^i(X_1 = k) \\ & \quad \cdot \mathbb{P}(X_n = j, X_l \neq j, 2 \leq l \leq n-1 | X_0 = i, X_1 = k) \\ &= \sum_{k \neq j} \mathbb{P}^i(X_1 = k) \mathbb{P}(X_n = j, X_l \neq j, 2 \leq l \leq n-1 | X_1 = k). \end{aligned}$$



(3) 当 $i \rightarrow j$ 时, 存在 $n > 0$ 使得 $P_{ij}^{(n)} > 0$. 取

$$n' = \min\{n : P_{ij}^{(n)} > 0\},$$

则

$$f_{ij}^{(n')} = \mathbb{P}(T_{ij} = n' | X_0 = i) = P_{ij}^{(n')} > 0,$$

从而

$$f_{ij} = \sum_{n \geq 1} f_{ij}^{(n)} \geq f_{ij}^{(n')} > 0.$$

当 $f_{ij} > 0$ 时, 存在 $n' > 0$ 使得 $f_{ij}^{(n')} > 0$. 从而

$$P_{ij}^{(n')} > 0 \Rightarrow i \rightarrow j.$$

同理, 当 $j \rightarrow i$ 时有 $f_{ji} > 0$. 所以

$$i \leftrightarrow j \Leftrightarrow f_{ij} > 0 \text{ 且 } f_{ji} > 0.$$



推论 3.3.2

若 j 非常返, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^{(n)} < \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^{(n)} = 0$.

证. (1) 任取正整数 N ,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N P_{ij}^{(n)} &= \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^n f_{ij}^{(k)} P_{jj}^{(n-k)} = \sum_{k=1}^N \sum_{n=k}^N f_{ij}^{(k)} P_{jj}^{(n-k)} \\ &= \sum_{k=1}^N f_{ij}^{(k)} \sum_{m=0}^{N-k} P_{jj}^{(m)} \leq \sum_{k=1}^N f_{ij}^{(k)} \sum_{m=0}^N P_{jj}^{(m)}, \end{aligned}$$



前面已证

$$\sum_{n=1}^N P_{ij}^{(n)} \leq \sum_{k=1}^N f_{ij}^{(k)} \sum_{m=0}^N P_{jj}^{(m)}.$$

令 $N \rightarrow \infty$, 则由于 j 非常返,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^{(n)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}^{(k)} (1 + \sum_{n=1}^{\infty} P_{jj}^{(n)}) \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P_{jj}^{(n)} < \infty.$$

(2) 一个级数收敛则其通项趋于0.



遍历态

定义 3.3.6

- 若状态 $i \in E$ 是非周期正常返的, 则称之为遍历的.
- 若一个不可约链所有的状态都是遍历的, 则称此链为不可约遍历链.

(见书中例 3.3.6, 3.3.7)



问题一: 在什么情况下, 初始分布与一步之后的分布相同?

例. 设马氏链 $X = \{X_n, n \geq 0\}$ 的初始分布是 $\pi = (\pi_j, j \in E)$, 其中

$$\pi_j := \mathbb{P}(X_0 = j), j \in E,$$

则一步之后的分布为

$$\mathbb{P}(X_1 = j) = \sum_{i \in E} \mathbb{P}(X_1 = j | X_0 = i) \mathbb{P}(X_0 = i) = \sum_{i \in E} \pi_i P_{ij},$$

所以初始分布与一步之后的分布相同当且仅当

- ① $\sum_{i \in E} \pi_i P_{ij} = \pi_j, j \in E$ (平稳性/不变性);
- ② $\pi_j \geq 0, \sum_j \pi_j = 1.$

#



称满足如下两条性质的数列 $\pi = (\pi_j, j \in E)$ 为 X 的平稳分布:

- ① $\sum_{i \in E} \pi_i P_{ij} = \pi_j, j \in E$ (平稳性/不变性);
- ② $\pi_j \geq 0, \sum_j \pi_j = 1$.

设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是以 E 为状态空间的马氏链.

问题二: 当 $n \rightarrow \infty$ 时, n 步转移概率

$$P_{ij}^{(n)} := \mathbb{P}^i(X_n = j) \text{ 的极限是否存在?}$$

若存在, 是否与 i 有关? 若无关, 是否就是平稳分布?



基本极限定理

定理 3.4.1:

对任意状态 $i \in E$, μ_{ii} 为其平均返回时间.

(1) 若 i 为非常返或零常返态, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ii}^{(n)} = 0;$$

(2) 若 i 为周期为 d 的常返态, 则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ii}^{(nd)} = \frac{d}{\mu_{ii}}, \text{ 设 } \frac{1}{\infty} = 0.$$

(3) 若 i 为非周期正常返态, 则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ii}^{(n)} = \frac{1}{\mu_{ii}}.$$



证. (3) 对任意 $t < 0$, 记矩母函数

$$P_i(t) := \sum_{n \geq 0} e^{tn} P_{ii}^{(n)}, \quad F_i(t) := \sum_{n \geq 0} e^{tn} f_{ii}^{(n)}.$$

由定理 3.3.4(1): $P_{ii}^{(n)} = \sum_{k=1}^n f_{ii}^{(k)} P_{ii}^{(n-k)}$, 可以得到

$$P_i(t) = 1 + P_i(t) F_i(t), \quad \text{即 } P_i(t) = 1/(1 - F_i(t)).$$

其中, $t < 0$ 与正常返性保证级数绝对收敛和号交换合法. 故

$$(1 - e^t) P_i(t) = \frac{1 - e^t}{1 - F_i(t)}.$$

非周期性的假设, 保证极限 $\lim_k P_{ii}^{(k)}$ 存在,



由如下实分析的结果:

Theorem: If the sequence $\{b_n\}$ converges to a limit b ($\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$), then

$$\lim_{z \rightarrow 1-} (1-z) \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = b$$

$$\lim_{t \uparrow 0-} (1 - e^t) P_i(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} P_{ii}^{(k)}.$$

而

$$\begin{aligned} \lim_{t \uparrow 0-} \frac{1 - e^t}{1 - F_i(t)} &= \lim_{t \uparrow 0-} \frac{-e^t}{-\sum_{n \geq 0} n e^{tn} f_{ii}^{(n)}} \\ &= 1 / \sum_{n \geq 0} n f_{ii}^{(n)} = 1 / \mu_{ii}. \end{aligned}$$

得证.

注释

上述基本极限定理是所谓 **马氏链的遍历定理**.

- ① 由 (3) 可知遍历态 i 满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ii}^{(n)} = \frac{1}{\mu_{ii}}.$$

其中, 非周期性保证左式存在, 正常返性保证等号成立.

- ② 有限马氏链没有零常返态,

不可约的有限马氏链的状态都是正常返的.

- ③ 如果马氏链有一个零常返态, 则必有无穷多个零常返态.



例 1. (命题 3.3.3 后, 续)

考虑状态空间 $E = \{0, 1, 2, 3\}$, 转移矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

的常返性以及遍历性.

解.

$$\text{状态 } 3: f_{33}^{(1)} = \frac{1}{2}, f_{33}^{(2)} = P_{30}P_{03} = \frac{1}{4}, f_{33}^{(3)} = 0,$$

$$f_{33}^{(n)} = 0, \text{ 当 } n \geq 5 \text{ 时,}$$

所以 $f_{33} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{33}^{(n)} = 1$, 推出 3 是常返态. 进一步的, $\mu_3 = 2$,

故为正常返态, 相应的马氏链是个遍历链.

平稳分布的定义

定义 3.4.1

设 $(P_{ij}, i, j \in E)$ 为 Markov 链 $X = \{X_n, n \geq 0\}$ 的转移概率.
若非负数列 $\{\pi_j\}$ 满足

- (1) (正则性) $\sum_{j \in E} \pi_j = 1;$
- (2) (不变性) $\pi_j = \sum_{i \in E} \pi_i P_{ij}, \forall j \in E.$

则称 $\{\pi_j\}$ 为 X 的平稳分布. 亦称不变的概率测度或不变分布.

注. 不变性可以推出, 对任意 $n \geq 1,$

$$\pi_j = \sum_{i \in E} \pi_i P_{ij}^{(n)}, \quad \forall j \in E.$$



平稳分布的意义

设马氏链 $X = \{X_n, n \geq 0\}$ 的初始分布是平稳分布 $\pi = (\pi_j, j \in E)$, 则

(1) 所有 $X_n, n \geq 0$ 的分布均为 π :

$$\mathbb{P}(X_n = j) = \pi_j, j \in E, n \geq 0.$$

(2) 对任意 $k \geq 2$, $(X_{n_1}, X_{n_2}, \dots, X_{n_k})$ 的分布仅与时间差 $n_2 - n_1, \dots, n_k - n_{k-1}$ 有关, 与时间起点 n_1 无关.

注. 当初始分布是平稳分布时, 马氏链是严平稳过程.



证. (1) X_n 的分布为

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n = j) &= \sum_{i \in E} \mathbb{P}(X_n = j | X_0 = i) \mathbb{P}(X_0 = i) \\ &= \sum_{i \in E} \pi_i P_{ij} = \pi_j.\end{aligned}$$

(2) 对任意 $k \geq 2$,

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X_{n_1} = i_1, X_{n_2} = i_2, \dots, X_{n_k} = i_k) \\ &= \mathbb{P}(X_{n_1} = i_1) P_{i_1, i_2}^{(n_2 - n_1)} P_{i_2, i_3}^{(n_3 - n_2)} \dots P_{i_{k-1}, i_k}^{(n_k - n_{k-1})} \\ &= \pi_{i_1} P_{i_1, i_2}^{(n_2 - n_1)} P_{i_2, i_3}^{(n_3 - n_2)} \dots P_{i_{k-1}, i_k}^{(n_k - n_{k-1})},\end{aligned}$$

得证.



平稳分布的存在性

定理 3.4.2:

对于非周期不可约链,

正常返该链存在平稳分布的充要条件.

并且, 此平稳分布就是它的极限分布[†].

对于时齐马氏链, 如果存在状态空间 E 上的概率分布 $\mathbf{p} = (p_i, i \in E)$, 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = i) = p_i, \quad i \in E,$$

则称 \mathbf{p} 是该链的极限分布[†].

注. 若马氏链是不可约非周期的, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^{(n)} = \frac{1}{\mu_{jj}}$; 进一步地, 若 $\{\frac{1}{\mu_{jj}}\}_{j \in E}$ 是一个分布, 则称之为极限分布.



证. (充分性) 令 $\pi = \{\pi_j, j \in E\}$ 为平稳分布, 则

$$\pi_j = \sum_{i \in E} \pi_i P_{ij}^{(n)} \text{ 且 } \pi_i \geq 0, \sum_{i \in E} \pi_i = 1.$$

由控制收敛原理,

$$\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in E} \pi_i P_{ij}^{(n)} = \sum_{i \in E} \pi_i \left(\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^{(n)} \right) = \left(\sum_{i \in E} \pi_i \right) \frac{1}{\mu_{jj}} = \frac{1}{\mu_{jj}}.$$

对上式关于 j 求和推得:

$$\text{存在 } \pi_I = \frac{1}{\mu_{II}} > 0, \text{ 可知 } \mu_{II} < \infty,$$

即 I 正常返. 从而由不可约性, 整个链正常返.



证. (必要性) 不妨取 $E = \{0, 1, 2, \dots\}$,

链是非周期正常返 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^{(n)} = 1/\mu_{jj}$ 大于 0.

由 C-K 方程

$$P_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k \geq 0} P_{ik}^{(m)} P_{kj}^{(n)} \geq \sum_{k=0}^K P_{ik}^{(m)} P_{kj}^{(n)}, \quad \forall K: \text{自然数}$$

令 $m \rightarrow \infty$, 有

$$\frac{1}{\mu_{jj}} \geq \sum_{k=0}^K \frac{1}{\mu_{kk}} P_{kj}^{(n)}.$$

再令 $K \rightarrow \infty$, 有

$$\frac{1}{\mu_{jj}} \geq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_{kk}} P_{kj}^{(n)}.$$

事实上, 上式只有等号才能成立:



假设 如果存在

$$j \text{ 使得 } \frac{1}{\mu_{jj}} > \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_{kk}} P_{kj}^{(n)},$$

则对 $j \in E$ 求和, 有

$$1 \geq \sum_{j \geq 0} \frac{1}{\mu_{jj}} > \sum_{j \geq 0} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_{kk}} P_{kj}^{(n)} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\mu_{kk}} \sum_{j \geq 0} P_{kj}^{(n)} \right) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{\mu_{kk}},$$

即 $\sum_{j \geq 0} \frac{1}{\mu_{jj}} > \sum_{k \geq 0} \frac{1}{\mu_{kk}}$, 矛盾.

再令 $n \rightarrow \infty$, 有

$$\frac{1}{\mu_{jj}} = \sum_{k \in E} \frac{1}{\mu_{kk}} (\lim P_{kj}^{(n)}) = \frac{1}{\mu_{jj}} \sum_{k \in E} \frac{1}{\mu_{kk}},$$

所以

$$\sum_{k \in E} \frac{1}{\mu_{kk}} = 1, \text{ 即 } \left\{ \frac{1}{\mu_{jj}}, j \in E \right\} \text{ 是平稳分布.}$$



例 1. (命题 3.3.3 后, 续)

状态空间 $E = \{0, 1, 2, 3\}$, 转移矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

对应一个遍历马氏链, 求其平稳分布 π .

解. 由方程 $\pi\mathbf{P} = \pi$, 即

$$\begin{cases} \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1, \\ \pi_0 = \frac{1}{2}\pi_3, \\ \pi_1 = \frac{1}{2}\pi_0, \\ \pi_2 = \pi_1, \end{cases}$$

解得

$$\pi = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right).$$



不可约马氏链可分为如下三种情况

- ① 链是暂留的, 不存在平稳分布;
- ② 链是零常返的, 不存在平稳分布;
- ③ 链是正常返的, 存在平稳分布,

$$\pi_j = \frac{1}{\mu_{jj}} = (\mathbb{E}[T_{jj}])^{-1}, j \in E.$$

实际上, 长期运行中不论初始状态是什么, 经过一段时间后处于 j 的概率都是 π_j .



例 1. (命题 3.3.3 后, 续)

$$\mu_{33} = 2, \pi_3 = \frac{1}{2}.$$

#

例 3.4.1 设

$$E = \{1, 2\}, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 5/8 & 3/8 \end{pmatrix},$$

试求相应平稳分布以及 $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}^n$.



转移概率的平均极限

考虑 m 步转移中访问 j 的频率 $\frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} I_n$,

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} I_n | X_0 = i\right] = \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} \mathbb{P}(X_n = j | X_0 = i) = \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} P_{ij}^{(n)}.$$

其极限总是存在的,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} P_{ij}^{(n)} = \frac{1}{\mu_{jj}}.$$

就长期而言, $\frac{1}{\mu_{jj}}$ 是访问 j 的次数在总时间中的平均份额.

注. $\lim_{m \rightarrow \infty} P_{ij}^{(m)}$ 不一定总存在, 如果存在, 也和 Stolz 定理相吻合:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} P_{ij}^{(n)} = \lim_{m \rightarrow \infty} P_{ij}^{(m)} = \pi_{j\cdot}$$



Recall

子集 $C \subset E$ 是闭的 $\Leftrightarrow \forall x \in C, y \notin C$, 有 $p_{xy} = 0$.

注. ① 子集 $C \subset E$ 是闭的, 也等价于

$$\text{对任意 } x \in C, \text{ 有 } \sum_{y \in C} p_{xy} = 1.$$

② 也就是说, 闭集中的任何状态均不可达闭集外的状态. 故

X 不可约当且仅当 E 没有非平凡闭子集;

③ 限制在一个闭集上的马氏链仍然是一个马氏链.



注. 设 $\{X_n\}$ 有平稳分布 π , 则对所有暂留和零常返态 j , 有

$$\pi_j = 0.$$

事实上,

$$\text{对任意 } n \geq 1, \pi \mathbf{P}^n = \pi,$$

由控制收敛定理,

$$\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in E} \pi_i P_{ij}^{(n)} = \sum_{i \in E} \pi_i \left(\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^{(n)} \right) = 0.$$



例 3.4.3 考虑状态空间 $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, 转移矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

的马氏链, 求每个不可约闭集的平稳分布.



不可约马氏链的性质

- (1) 存在平稳分布当且仅当 $\{X_n\}$ 正常返. 此时平稳分布唯一即为 $\{1/\mu_{ii}, i \in E\}$.
- (2) 若 $\{X_n\}$ 遍历, 则对任意状态 $i, \lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^{(n)} = \pi_j$, 与出发点无关.
- (3) 若状态空间有限, 则 $\{X_n\}$ 一定正常返.

- 若 μ_{ii} 越小, 即访问状态 i 的平均时间间隔越小, 则访问 i 越频繁, 从而访问 i 的极限概率也越大, 所以 π_i 越大.



例 3.4.4 设马氏链的状态空间 $E = \{0, 1, 2, \dots\}$, 转移矩阵 $\mathbf{P} = (P_{ij}) : i, j \in E$,

$$P_{ij} = \begin{cases} p_i, & j = i + 1, \\ r_i, & j = i, \\ q_i, & j = i - 1, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases}$$

其中 $p_i + r_i + q_i = 1$. 这种链称为生灭链, 是不可约的. 记

$$a_0 = 1, \quad a_j = \frac{p_0 p_1 \cdots p_{j-1}}{q_1 q_2 \cdots q_j}, \quad j \geq 1.$$

试证此链存在平稳分布的充要条件是

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j < \infty.$$



有限马氏链的状态分解

$$E = T \cup C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_k,$$

其中, C_1, C_2, \dots, C_k 是所有闭的互达等价类, T 是余下的状态.
则

- (1) C_1, C_2, \dots, C_k 中各状态正常返, T 中各状态暂留;
- (2) 如果 $X_0 \in C_i$, 则此链永不离开 C_i ;
- (3) 如果 $X_0 \in T$, 则此链最终会进入某个 C_i 并将不再离开.



例. 设马氏链 $\{X_n\}$ 的状态空间 $E = \{1, 2, 3, 4\}$, 一步转移矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0.2 & 0.2 & 0 \end{pmatrix},$$

讨论各状态的周期性和常返性, 并计算正常返态的平均回转时间.



解. 该链有两个等价类:

$\{1, 2, 3\}$ 和 $\{4\}$.

其中 $C_1 = \{1, 2, 3\}$ 是闭的, $\{4\}$ 不闭. 所以

1, 2, 3 正常返, 4 暂留; 1, 2, 3 非周期, $d(4) = 0$.

将马氏链限制在 C_1 上得到一个遍历马氏链, 转移矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.7 & 0 \end{pmatrix},$$

平稳分布 $(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = (\frac{10}{27}, \frac{7}{27}, \frac{10}{27})$, 相应的

$$(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = (\frac{27}{10}, \frac{27}{7}, \frac{27}{10}).$$

